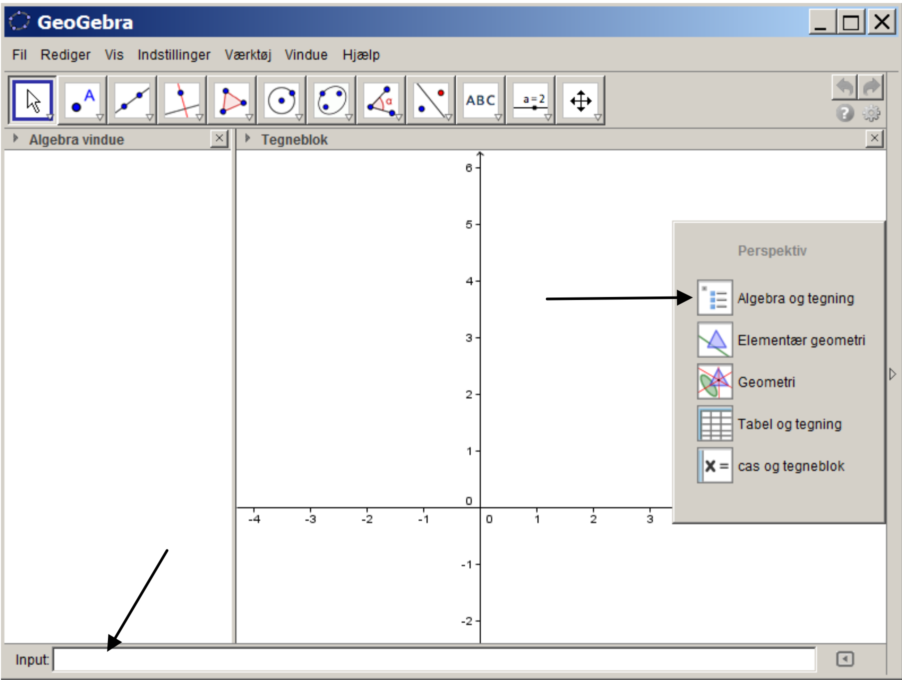
GeoGebra metoder
MatB

GeoGebra metoder, MatB

Her har jeg beskrevet Geogebra version 4.4.43 fra den 8.aug 2014, for matematik på B-niveau.
Man bør nok vælge en portabel version (Se slutnote) eller evt. en standard version:
Gå til www.geogebra.org og vælg software → Windows eller Mac
Dette forudsætter at Java er installeret. Hvis man ikke har det, får man en fejlmeddelelse, som man blot skal følge. Så bliver Java installeret på ens computer. Der findes også en række udgaver til Geogebra uden Java, men dem vil jeg ikke beskrive her. Husk at installere den danske version.

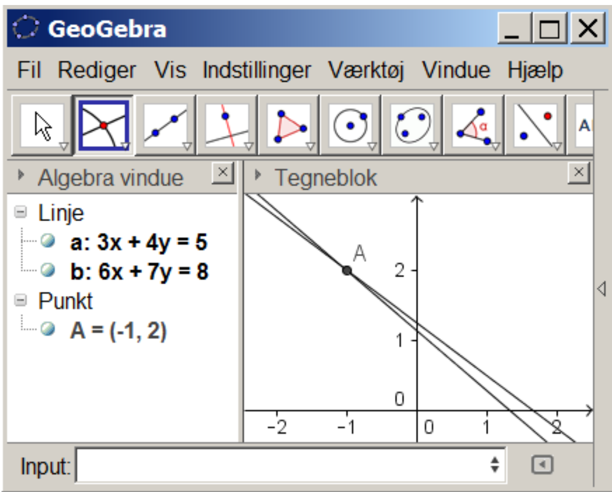
Når programmet starter, vælges Algebra og tegning.



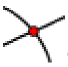
Nedenfor er med rødt vist eksempler på indtastninger i input-linjen nederst i GeoGebra vinduet.

1 ligning med 1 ubekendt af første grad:

Tast ligningen ind i inputlinjen.
Det giver linjen x= …. som resultat.



2 ligninger med 2 ubekendte (x og y):

Man taster de to ligninger ind i inputlinjen. Det giver normalt to rette linjer. De hedder typisk a og b. Man finder skæringspunktet med værktøjet "skæring mellem to objekter"  der findes i værtøjslinjen for oven (nr. 2 fra venstre, klik på den lille pil til højre for neden på værktøjsgruppen). Klik nær et skæringspunkt på grafen, eller klik på de to udtryk i algebra-vinduet.

Regression:

Den bedste rette linje

Regnearket kommer frem ved at klikke på *Vis* -> *Regneark*.

Man indtaster punkterne i regnearket med x-værdierne i kolonne A og y værdierne i kolonne B. Husk decimalpunktum ved decimaltal. Komma duer ikke. Så markerer man tallene, højreklikker og vælger 'lav liste af punkter.' Listen hedder typisk 'liste1'.

g1(x)=FitPoly[liste1,1] laver den bedste rette linje gennem punkterne. Funktionen kaldes her g1(x). Teknisk set fitter man med et førstegradspolynomium. Det er bedre end FitLinje[…]

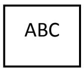
Eksponentielle udviklinger - funktioner

g2(x)=FitVækst[liste1] laver den bedste eksponentielle funktion gennem en liste af punkter. Funktionen kaldes her g2(x). Man kan udregne
fremskrivningsfaktoren a = g2(1)/g2(0)
og den %-vise vækstrate som r = a-1
Halveringskonstanten kan man finde ved at skære g2(x) med den konstante funktion h(x)=g2(0)/2, eller via formlen T_½= ln(0.5)/ln(a).

Potensfunktioner

g3(x)=FitPot[liste1] laver den bedste potensfunktion gennem en liste af punkter. Den kaldes her g3(x). Hvis x vokser med 20 %, udregnes y-tilvæksten sådan ka=g3(1.20)/g3(1) =1.3634 dvs. 36 % y-vækst.

Tekstboks

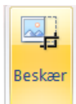
Indsættes med valg af 

Indeni kan man skrive tekst (med " omkring) og alle variable. Imellem skal der være et +
F.eks. kan man med den variable f(x)=3x skrive i tekstboksen: "For x=2 får man værdien " + f(2) og i tekstboksen står der så For x=2 får man værdien 6

Dokumentation:

"I en opgavebesvarelse vil det være påkrævet, at der gives referencer til hvilke kommandoer der er brugt i Geogebra, ligesom screen-dumps af CAS delen skal med. Husk også en skitse, enten fra opgaven, eller håndtegnet". (Denne anbefaling er givet af *Lars Bo Kristensen*, Egaa Gymnasium).

Man kan tage et print-screen, og så vedlægge det som et bilag til den håndskrevne matematik-opgave. Det anbefaler jeg (ST). Skriv metode og facit tydeligt i opgaven, også selvom det står i bilaget. Hvis man skriver opgaven i et tekstbehandlingsprogram, kan man indsætte sit print-screen, og så kan det anbefales at benytte beskær-værktøjet til at fjerne den del af billedet der ikke er Geogebra.



Men ofte er det bedre at løse opgaverne i hånden, og så bruge Geogebra-udskrifterne som bilag. Det er både det hurtigste, og det mest "matematiske". I skal alligevel regne i hånden til første delprøve til eksamen.

Funktioner

f(x)=4*sqrt(x+1) - x^2+exp(0.5x) tegner denne funktion.

$$f(x) = 4\sqrt{x+1} - x^2 + e^{0.5x}$$

Bemærk hvordan man skriver kvadratroden og eksponentialfunktionen. Læg mærke til, at der altid benyttes punktum i stedet for decimalkomma i Geogebra.

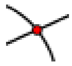
f3=f(3) udregner funktionsværdien når x=3. Resultatet kaldes her f3, og man ser i algebra-vinduet, at f3= 3.4817 (Se figuren nedenfor).

Punkter

A=(2, f(2)) tegner det punkt A på f(x), hvor x=2.

Ligninger

I sin generelle form hedder det $\boxed{\text{f(x)=g(x)}}$

Indtast de to funktioner i inputlinjen, og skær dem med skæringsværktøjet  der findes i værtøjslinjen for oven (nr. 2 fra venstre). Klik nær et skæringspunkt på grafen.

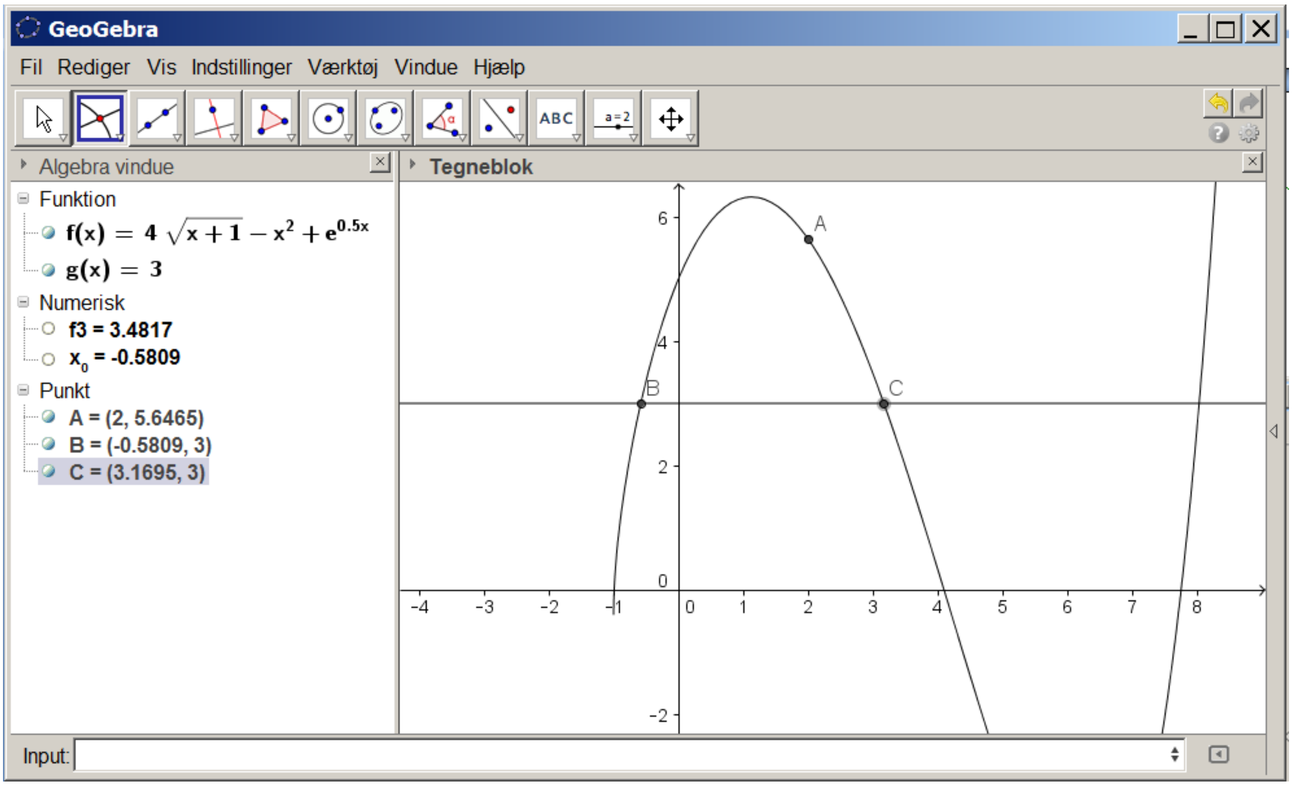
Det kan f.eks. anbefales at indføre en konstant funktion g(x)=3, hvis ligningen hedder $\boxed{\text{f(x)=3}}$.

Er der andre skæringspunkter? Dette spørgsmål kan ofte besvares, da vi kender f(x) og g(x).

x_0=x(B) giver x-koordinaten for B. Den kaldes her for x_0

C=skæring[f, g, 2,4] giver skæringspunktet C mellem f(x) og g(x) med x i intervallet [2;4]

Man får 4 betydende cifre under *indstillinger* -> *afrunding*. Det vil ofte være nødvendigt.



Tangenter og differentialregning.

Vi ser på et eksempel, hvor man først indtaster dette i inputlinjen:

x_0=2 og

f(x)=-x^2+3x+2

Tangenten tegnes ved først at indsætte punktet A=(x_0,f(x_0)) på grafen, og så vælge tangentværktøjet, der ligger i 4. værktøjs-kategori fra venstre.

Det ses af figuren, at tangenten gennem (2,f(2)) har ligningen y= -x+6

Ekstremum[f] udregner maksimumspunkter og minimumspunkter for funktionen f(x), hvis den er simpel.(Et polynomium).

Det ses af figuren, at f(x) har maksimum i y= 4.25 når x=1.5 (Punkt B).

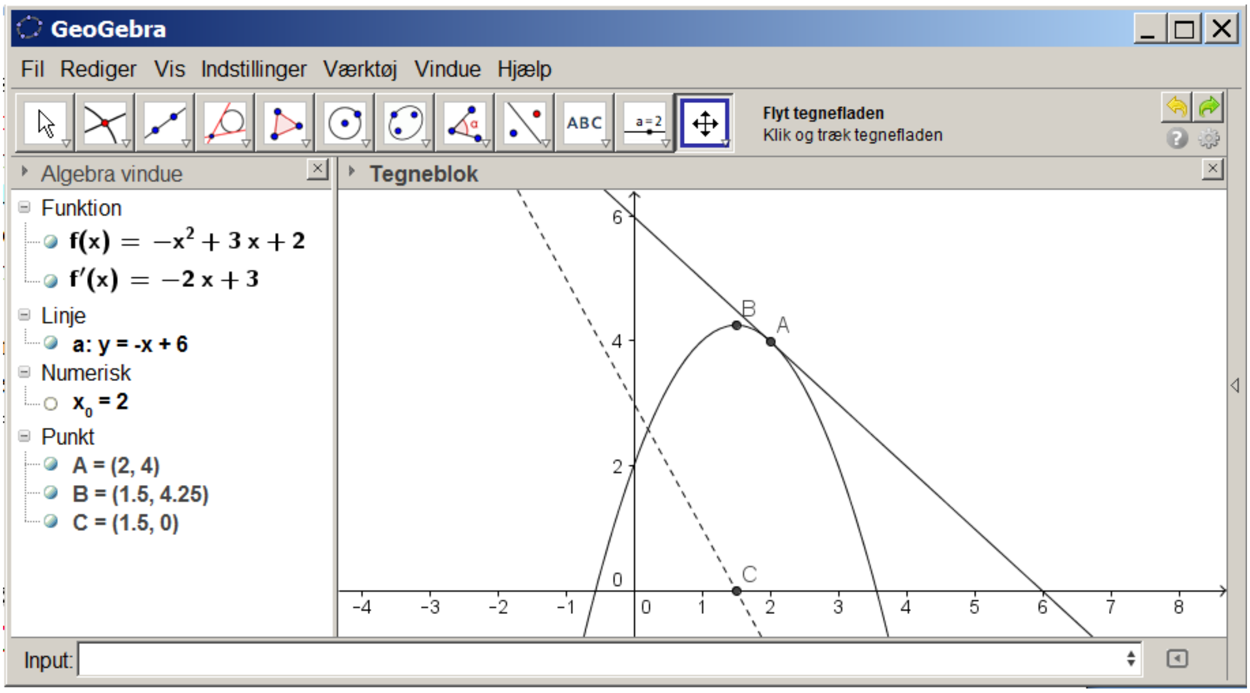
En anden (og mere matematisk) løsningsmetode er at skrive f'(x) i inputlinjen. Det udregner og tegner f ' (x). Vælg egenskaber, stil og tegn den stiplet. Udtrykket for f '(x) ses i algebravinduet.

Ligningen

f '(x)=0

løses ved at finde skæring mellem f '(x) og x-aksen med værktøjet ”skæring mellem to objekter”. Det ses, at skæringspunktet er C=(1.5,0).

Der er altså stadig maksimum, når x=1.5 (som vi fik det ovenfor).

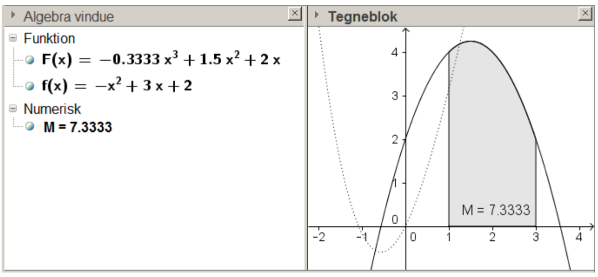


Arealer og integralregning $\int f(x)dx$

Funktionen er stadig f(x)= $-x^2+3x+2$

F(x)= Integral[f] laver stamfunktionen til f(x), uden en konstant lagt til. Funktionen kaldes her F(x). Den er tegnet prikket.

$\int_1^3 f(x)dx =$ M = Integral[f, 1, 3] laver arealet under f(x) med x fra 1 til 3 (hvis f(x)≥0). Tallet kaldes her M.



CAS-værktøjet og SOLVE

Tryk på *Vis ->CAS.* 'Solve' hedder 'Beregn' på dansk

Beregn

Vi ser først på ligningen

a*x²+b*x+c=0

Da denne ligning både indeholder x'er og variable a, b og c, kan man ikke løse den ved at indføre f(x) og g(x) og så benytte "skæringsværktøjet". Men man kan løse ligningen eksakt med CAS sådan:

Først defineres funktionen (bemærk det mærkelige lighedstegn := Det kaldes "tildeling"):

f(x):= a*x²+b*x+c

Så løses ligningen eksakt ved ordren

Beregn(f(x)=0, x)

I CAS-værktøjet kan man også gøre det lidt mere intuitivt, ved først at indtaste ligningen

f(x)=0

og dernæst klikke på den knap med teksten "x=". Dette svarer til andre programmers SOLVE-funktion.

Bemærk: Det er vigtigt at man ikke har lagt værdier ned i de variable x, a, b og c, f.eks. ude i algebravinduet. Derfor gør jeg ofte det, at jeg starter Geogebra-programmet på ny til hver opgave. KIS! Keep it simpel!

Flere ligninger med flere ubekendte

Beregn[{f(1)=0, f(3)=0, f(0)=3},{a,b,c}]

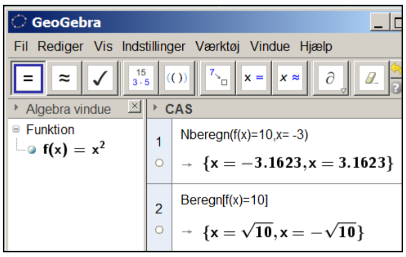
Giver resultatet (a=1 b=-4 c=3) hvis f(x) er defineret som f(x):=a*x^2+b*x+c

Beregn[{3x+4y=5, 6x+7y=8},{x,y}] Giver resultatet (x= -1 y=2)

Beregn[{ (a-1)*x+a*y=a+1 , (b-1)*x+b*y=b+1},{x,y}] Giver resultatet (x= -1 y=2)

NBeregn

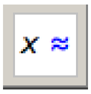
Denne funktion svarer til skærings-værktøjet, hvor man finder den numeriske løsning, der ligger tættest på en given udgangsværdi (f.eks. x= -3), se eksemplet til højre:

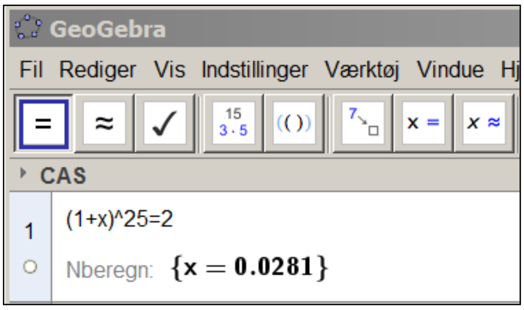


Nberegn(f(x)=10, x=-3) giver resultatet x= ±3.1623 hvis f(x)=x^2

Mens den eksakte løsning får man med

Beregn(f(x)=10) Det giver resultatet $x = \pm\sqrt{10}$





Ligningen $(1+x)^{25}=2$

er svær at beregne eksakt i Geogebra. Hvis man klikker på knappen ”x=” , får man at vide, at det tager for lang tid at beregne. Det skyldes, at programmet først udregner venstresiden som et polynomium af 25.grad og så prøver at løse det. Og det er jo ikke nogen helt enkel opgave.

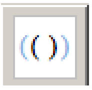
Hvis man derimod klikker på knappen med teksten ”x≈” får man hurtigt resultatet x= 0.03

Det vil normalt være for dårlig en nøjagtighed, så derfor vælger man *indstillinger* → *afrunding*, og med 4 betydende cifre får man så det fornuftige resultat x= 0.0281.

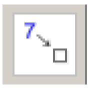
3 vigtige CAS-værktøjer.

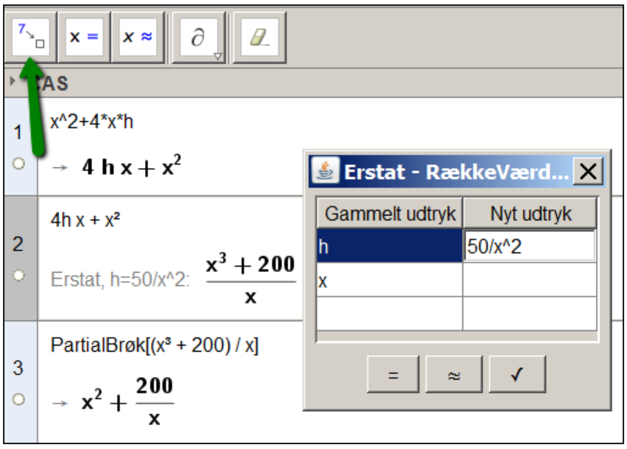
Der er et værktøj der hedder **faktor**. 

Hvis man taster 2x^3 + 3x^2 - 1 , og vælger det, fås $(x+1)^2$ (2x-1)

Der er et andet værktøj der hedder **led**. 

Hvis man taster (x-2) (x+3) og vælger det, fås x^2 + x – 6

Det sidste værktøj vi ser på, er erstat 



En kasse uden låg skal have rumfanget 50 og have mindst overflade. Hvad er udtrykket for overfladen f(x) ?

Rumfanget er $50 = x^2\ h \ \Leftrightarrow \ \frac{50}{x^2} = h$

Dette indsættes i udtrykket for overfladen $f(x) = x^2 + 4 * x * h$

Her skal vi så erstatte h med udtrykket ovenfor. I Geogebra gøres det ved at indtaste udtrykket, og så erstatte det gamle udtryk for h med det nye udtryk 50/x^2

Det ses at svaret bliver $\frac{x^3+200}{x} \quad eller \quad x^2 + \frac{200}{x}$

Det kunne man måske også gøre med ”hånd og ånd”, men opgaven skal ikke blive ret meget vanskeligere, førend det er et rigtigt stærkt værktøj.

Trigonometri - beregning i den vilkårlige trekant

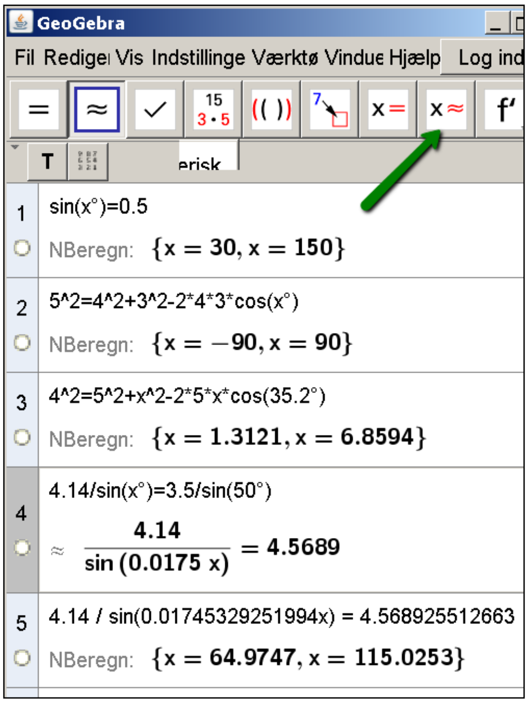
Vi ser først på ligningen

sin(x°)=1/2

(NB det lille gradtegn i ligningen fås ved at klikke på α. Hvis man glemmer det, får man løsningen i radian, og det er jo noget helt andet.) (Tastaturgenvej: Alt+o (lille o) ; [MacOSX: Ctrl+o]).

Den almindelige løsning findes ved at trykke på x≈

Det ses, at løsningen er enten x=30° eller x=150°



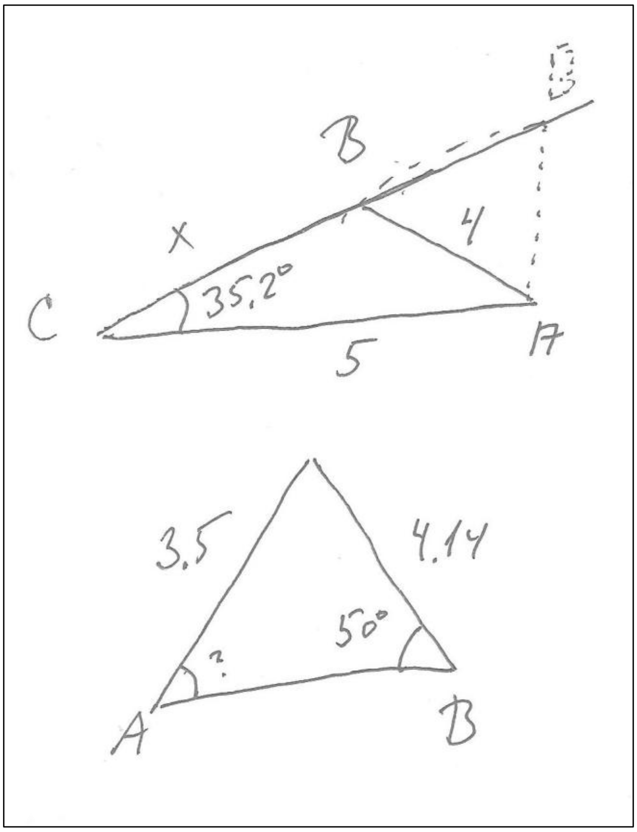
Cosinusrelationen benyttes på samme måde.

I linje 2 på figuren til højre ser jeg på trekanten med c=5, a=3 og b=4. Det er den kendte Pythagoræiske retvinklede trekant.

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(C)$

$5^2 = 3^3 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos(x^\circ)$

Det ses, at vinkel C er 90°. Den negative løsning x= -90° er uaktuel.



Man kan også bruge cosinusrelationen til at finde længden af det ukendte ben til den kendte vinkel. Se figuren. Den ukendte side BC kaldes x, og så sætter man ind i formlen.

$$4^2 = 5^2 + x^2 - 2 * 5 * x * \cos\,(35.2^\circ)$$

Denne ligning løser man numerisk som før, og får de to løsninger: x = 1.3 og x = 6.9

Til sidst et eksempel på "en vanskelig ligning".

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)}$$

$$\frac{4.14}{\sin(x^\circ)} = \frac{3.5}{\sin(50^\circ)}$$

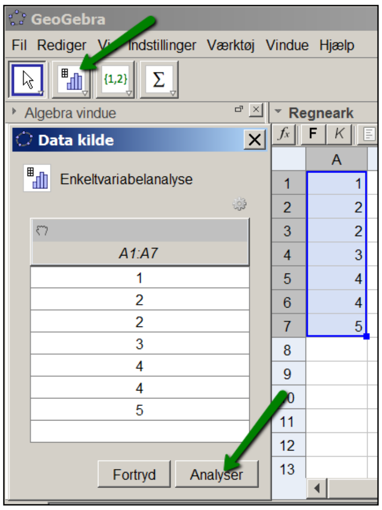
Denne ligning har Geogebra svært ved at løse.

- Derfor skal man først " udregne ligningen" ved at klikke på ≈.
- Så går man ned i den næste linje med musen, og så klikker man på forrige linjes resultat.
- Det er så denne opgave, man kan løse numerisk ved at trykke på x≈

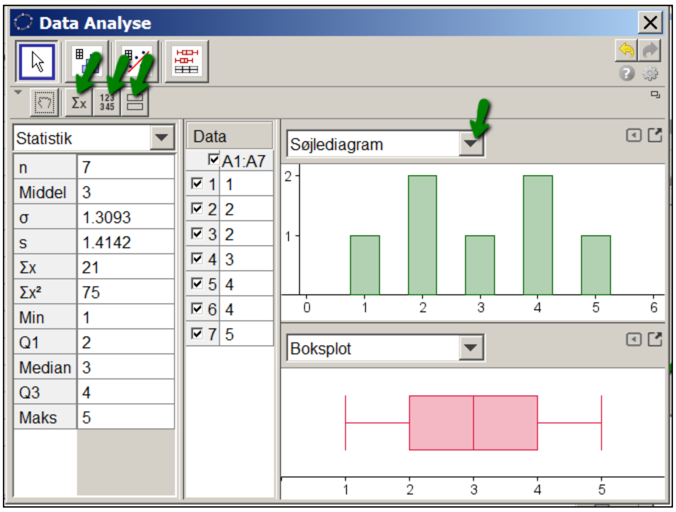
Prøv det. Det er lettere at gøre end at beskrive.

Det ses, at der er to løsninger A=65.0° og A=115.0°

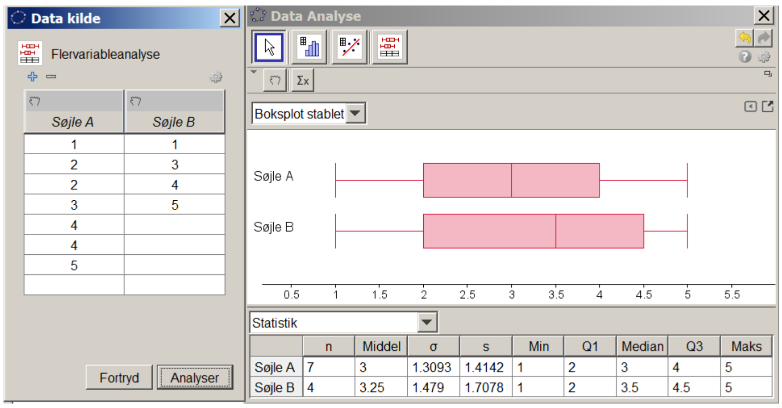
Statistik - ugrupperede observationer



Vis -> regneark, og indtast et ugrupperet observationssæt i kolonne A. (Rådata)
Marker tallene, og vælg *enkelt-variabel-analyse*.(2.værktøjsgruppe fra venstre), og så *analyser*. (Se figuren til højre).
I figuren herunder har jeg trykket på mange af de små symboler i 2.menu-linje. Så kan man aflæse alle de statistiske deskriptorer: Middelværdi, spredning, median og kvartilerne. Man kan få to grafer frem (Histogram+boksplot).



Hvis man vil lave *fler-variabel analyser*, skal man vælge kolonnerne i regnearket først, og så klikke på værktøjet *fler-variabel analyse*. Så kan man f.eks. sammenligne boksplot.



Man kan også tegne boksplottet direkte i tegneblokken:
Boksplot[1,0.2,1,2,3,4,5]
Boksplot[<yOffset>,<ySkalering>,<Start Værdi>,<Q1>,<Median>,<Q3>,<Slut Værdi>]
Størrelsen yOffset angiver hvor højt oppe boksplottet skal tegnes. ”ySkalering” angiver bredden.

Lister

Vi ser på følgende eksempel: Der kastes 7 terninger, og resultatet er 4,2,1,3,2,4,5.
Tallene indtastes i regnearket, gerne i flere kolonner. Tallene markeres, og der vælges lav -> liste.
Listen omdøbes til raadata. (Det lyder mere indviklet her på skrift, end det er når man gør det).
Alternativt benyttes inputlinjeordren
Rådata={4,2,1,3,2,4,5}
Nu vil man typisk finde en liste med unikke observationer:

Obs1 =unik{rådata} Det giver tallene {1,2,3,4,5}.
Hyppigheden af de enkelte observationer regnes sådan
Hyp1=hyppighed{rådata} det giver {1,2,1,2,1}
Og man tegner søjlediagrammet sådan
SøjleDiagram[Obs1,Hyp1,0.1]
Det sidste tal (de 0.1) angiver hvor smalle søjlerne skal være.

Kumuleret hyppighed findes næsten som almindelig hyppighed, blot skrives true først:
Hyp2=hyppighed[true,rådata]

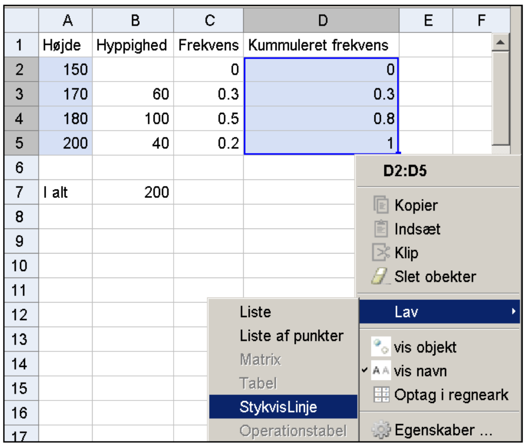
Der er mange andre muligheder indenfor statistik.
Hjælpefunktionen er intuitiv og fremragende.

Statistik - grupperede observationer - Sumkurve

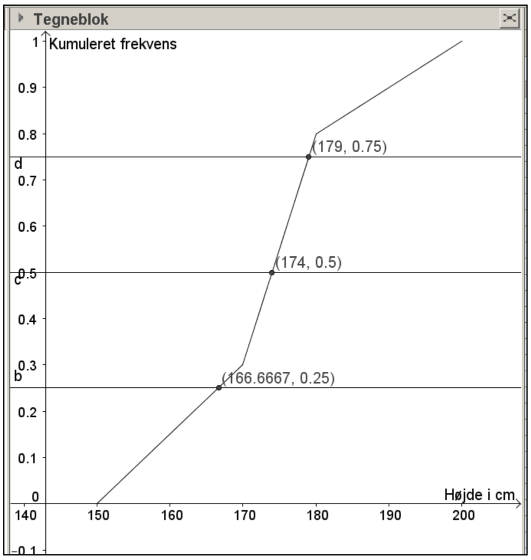
Opgave: Højden af eleverne i en lille skole måles, og observationerne inddeles i intervaller

Højde i cm	]150;170]	]170;180]	]180;200]
Antal elever	30	50	20

Tegn sumkurven og angiv kvartilerne

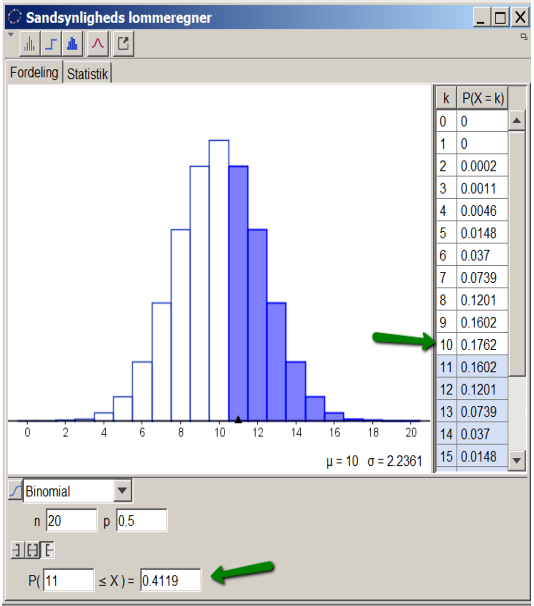


Tallene indtastes i Geogebras regneark, sådan at højre endepunkt står i kolonne A.
Frekvensen i C3 udregnes som =B3/200
Og denne formel "trækkes ned"
Den kumulerede frekvens F(x) angiver den del af observationerne, der er x eller mindre. Formlen i D3 indtastes som =D2+C3 , og den formel "trækkes" også ned.
Nu skal vi lave en stykkevis linje mellem punkter, hvor x-værdierne står i kolonne A, og y værdierne står i kolonne D. Det gør man ved, først at markere tallene i kolonne A, så trykker man på Ctrl-knappen, og så markerer man y-værdierne. Så højreklikker man på det blå område og vælger Stykvis Linje. (Se figuren).
Så tegnes sumkurven i tegneblokken af Geogebra, og opgaven er blot at justere akserne, så det hele kommer med.
Jeg har indtegnet de tre linjer y=0.25 y=0.5 og y=0.75 og skåret dem med sumkurven.



Det ses, at kvartilsættet er Q1=166.7 cm, median 174 cm og øvre kvartil er Q3=179 cm.
Jeg har valgt at y-aksen tegnes "til kant", og at vise "værdi" for de tre punkter i stedet for deres navne.

Binomialfordelingen



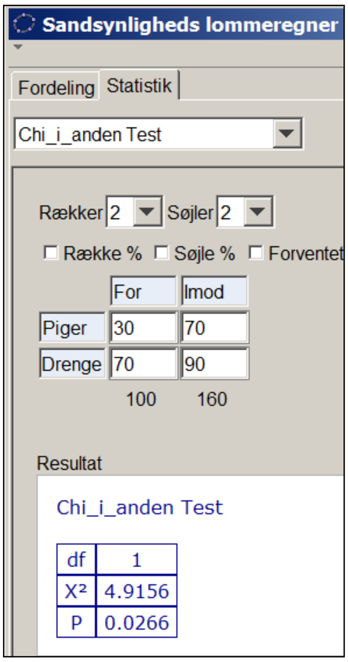
Binomialfordeling[n,p,r,false] = P(X=r)
Binomialfordeling[n,p,r,true]= P(X≤r)
Binomialkoefficient:
nCr[n,r] = $K_{n,r}$

Sandsynligheds-lommeregneren finder man sådan
Vis regneark → sandsynligheds lommeregner
(2.værktøjsgruppe fra venstre) → Vælg binomial

Det ses at med n=20 og p=0.5 er
P(11 ≤X)= 0.4119 = 41% og P(X=10)=0.1762

χ^2-test

Laves enten i Excel eller i Geogebra. I Geogebras vælges Regneark → Sandsynlighedslommeregner (i anden værktøjsgruppe fra venstre, nederst) → statistik
Der er flere muligheder:
Goodness of Fit Test
Chi_i_anden-test (uafhængigheds-test) Se eksemplet til højre.



Læg mærke til at teststørrelsen hedder her X², og sandsynligheden for at få denne fordeling af stemmerne rent tilfældigt ud fra hypotesen, kaldes p. I dette tilfælde er p-værdien 2.66%. Det betyder, at man må forkaste hypotesen om uafhængighed ved et signifikansniveau på 5%

Slutnote :

I en eksamenssituation kan det godt betale sig at have installeret programmet (4.4) som en flytbar version hjemmefra. Så oplever man ikke, at programudviklerne har opdateret programmet med nye (og måske forvirrende) faciliteter, siden man selv sidst brugte programmet :
Først afinstallerer man alle versioner af Geogebra (i Windows ved at gå til kontrolpanel → Programmer og funktioner, og så fjerne alt hvad der står Geogebra på.)
Dernæst installeres fra
http://www.geogebra.org/cms/da/portable
Så får man alt med, også en version af Java der duer. Pak zip-filen ud, og vælg den fil, der hedder Geogebra (programfil). Send en genvej til skrivebordet, så du kan finde den igen. Det kan godt være lidt svært at finde den igen.
Denne version bliver ikke opdateret løbende, når den er installeret på den måde. Det kan godt være en fordel.

Tak

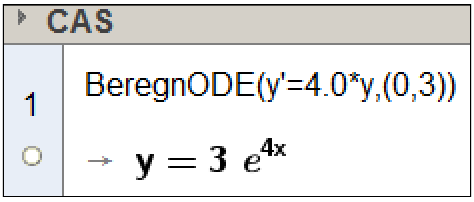
Tak til Frede Dybvad, Holstebro Gymnasium og HF, som præsenterede Geogebra Metoder (ver.1) til et møde i DASG december 2010. Som det ses af ovenstående, har jeg arbejdet videre med det.

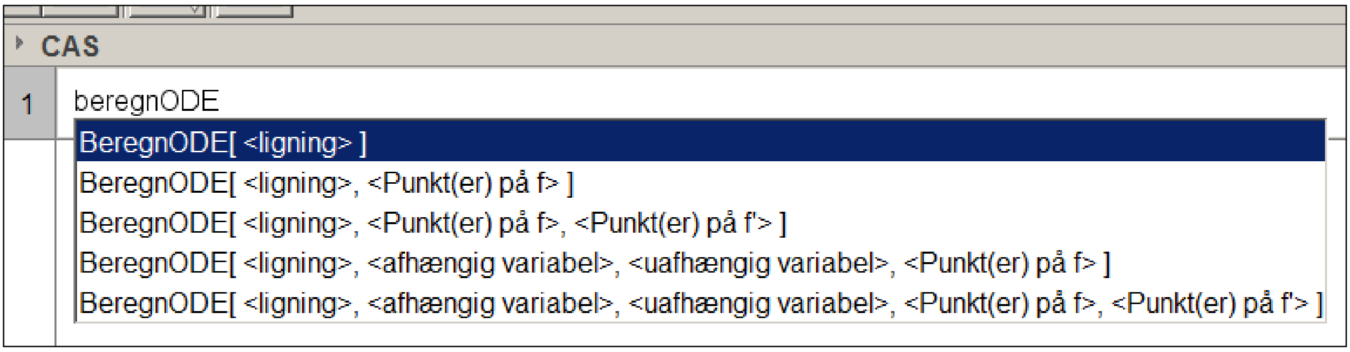
Søren Toft 8.marts 2015

PS: Geogebra kan også anvendes på A-niveau i 3.g

Løsning af differential-ligninger

Find den løsning til
y'(x)=4.0*y
der går gennem punktet (0,3)





Opgaver:

#1a: Løs ligningen 3x + 4(x-2) = 5x
#1b: Løs ligningen 4x-3(x-3) = 4x

#2a: Løs ligningssystemet 2x+3y=4
6x+7y=8

#2b: Løs ligningssystemet x+2y=3
2x+3y=4

#3: Find den bedste lineære funktion f(x), den bedste eksponentialfunktion g(x) og den bedste potensfunktion h(x) gennem følgende punkter:

Opgave a

x	2	3	4	6
y	19	31	42	65

Opgave b

x	0.2	0.3	0.4	0.6
y	2	4	8	25

#4a: $f(x) = 0.4\,x^2 + e^{-x} + \sqrt{2-x}$ Løs ligningen f(x)=3 og find ekstremumsværdierne
#4b: $f(x) = 5\sqrt{x+2} - 4x + e^{0.4x} + 2$ Løs ligningen f(x)=8 og find ekstremumsværdierne

#5: Hvad er tangentens ligning for funktionerne i opgave 4. Tangenten skal gå igennem punktet P=(1,f(1)).

#6a: Find en stamfunktion til $f(x) = 3x^2 + 2x + 8$
#6b: Find en stamfunktion til $f(x) = \frac{1}{x} + e^x$, x>0

#7a: Faktoriser udtrykket $2x^3 - 7x^2 + 8x - 3$
#7b: Faktoriser udtrykket $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 2x + 1$

#8a: Udregn til led $(2+3x)^3$
#8b: Udregn til led $(1+2x)^2(x-2)$

#9a: Løs ligningen $\frac{2}{\sin(18°)} = \frac{5}{\sin(x°)}$

#9b: Løs ligningen $10^2 = 8^2 + 7^2 - 2 * 8 * 7 * \cos(x°)$
(Formuler de to trekantopgaver som #9a og #9b er løsninger til).

#10a: Binomialfordeling med n=22 og p=0.55. Beregn P(X≤9) og P(X=10)
#10b: Binomialfordeling med n=10 og p=1/6. Beregn P(1≤X≤5)

#11a: Tegn boksplot for følgende to kvartilsæt: |min, Q1,median,Q3,max | =
|3.4, 8.5, 7, 9.1,12| og |0.1, 2,3, 5,12|
#11b: Udregn middelværdi og spredning for følgende datasæt [1,3,5,7,6,7.7,8.8,2.2,3,5,7]
Tegn et histogram med "en passende inddeling" i intervaller.